



ce
pre
UNI

**CICLO
PRE 2024-I**

Trigonometría

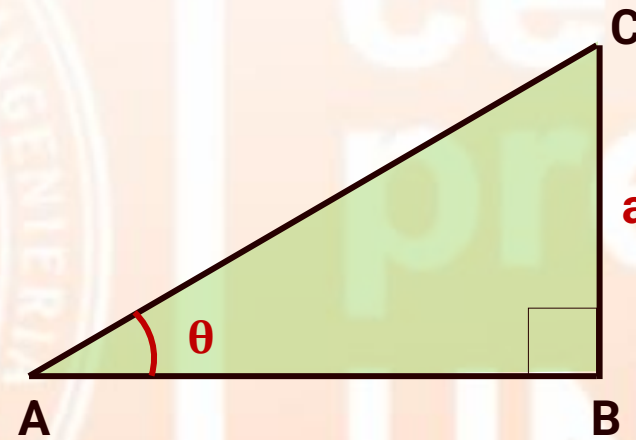
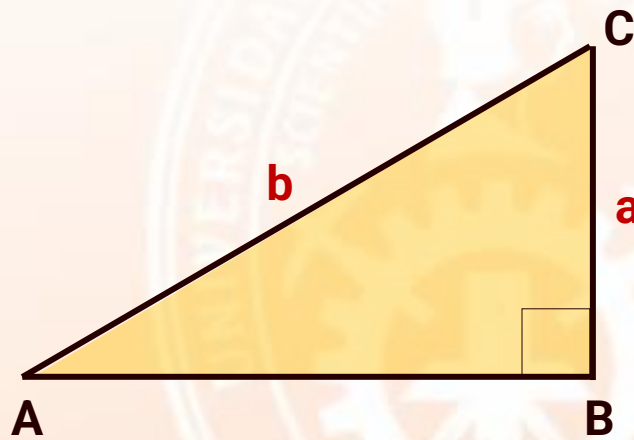
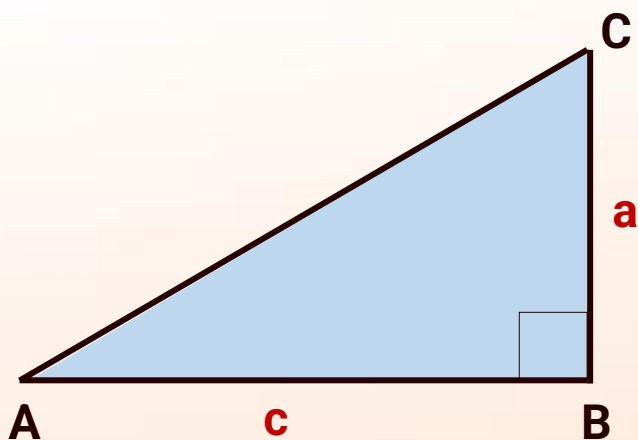
1. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS
2. ÁNGULOS VERTICALES



RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Definición

Es el proceso mediante el cual se calculan las medidas de los lados y ángulos desconocidos de un triángulo rectángulo, a partir de la información de dos de sus elementos, entre los cuales debe conocerse necesariamente la longitud de un lado.



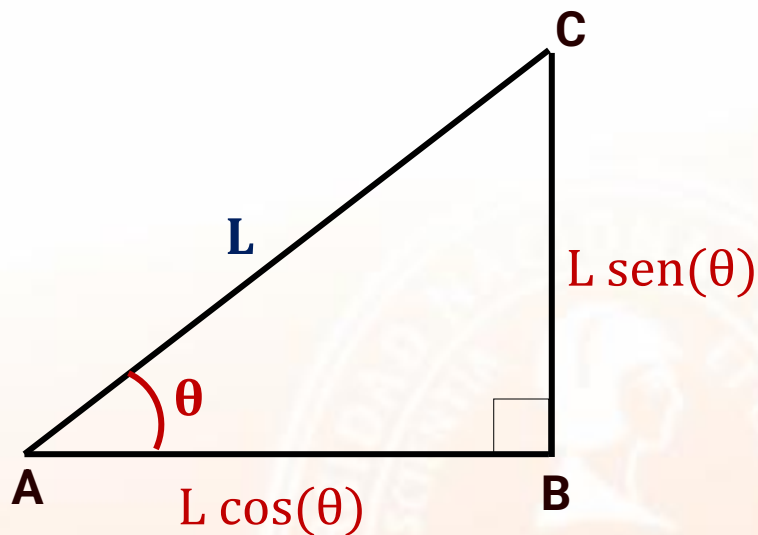
Cuando se conoce las medidas de un ángulo agudo y un lado

Si se conoce la longitud de un lado y la medida de un ángulo agudo; nuestro objetivo es calcular las longitudes de los otros dos lados, ya que la medida del otro ángulo agudo sería el complemento del ángulo agudo conocido. Para calcular la longitud de los lados desconocidos, se aplicará el siguiente criterio:

$$\frac{\text{Longitud del lado desconocido}}{\text{Longitud del lado conocido}} = \text{Razón Trigonométrica del ángulo}$$

I. SE CONOCE LA MEDIDA DE UN ÁNGULO AGUDO Y LA LONGITUD DE SU HIPOTENUSA

En la figura: $m\angle BAC = \theta$; $AC = L$



$$* \frac{BC}{L} = \text{sen}(\theta)$$

$$BC = L \text{ sen}(\theta)$$

$$* \frac{AB}{L} = \text{cos}(\theta)$$

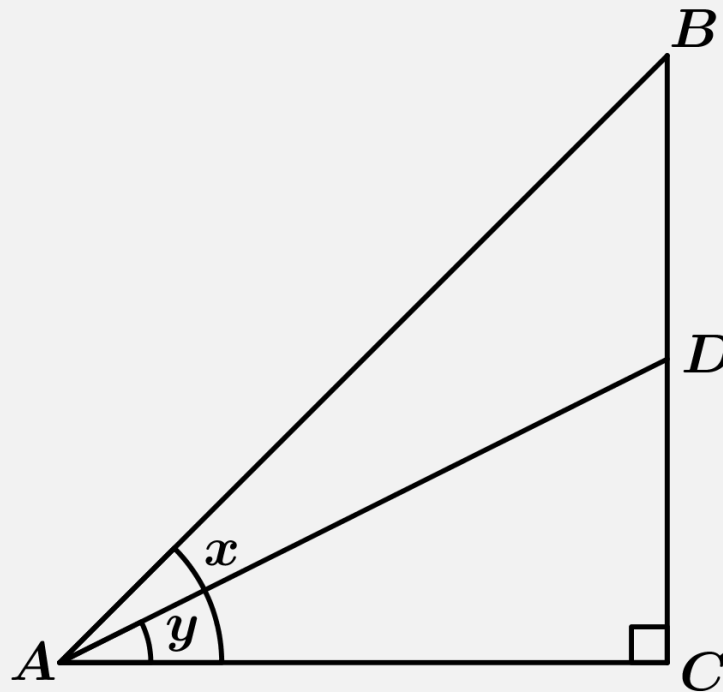
$$AB = L \text{ cos}(\theta)$$

PROBLEMA 1 (EXAMEN ADMISIÓN UNI 2005 –**2)**

En la figura mostrada, indique el equivalente de

$$\frac{(AB)\sin(x - y)}{\cos(y)}$$

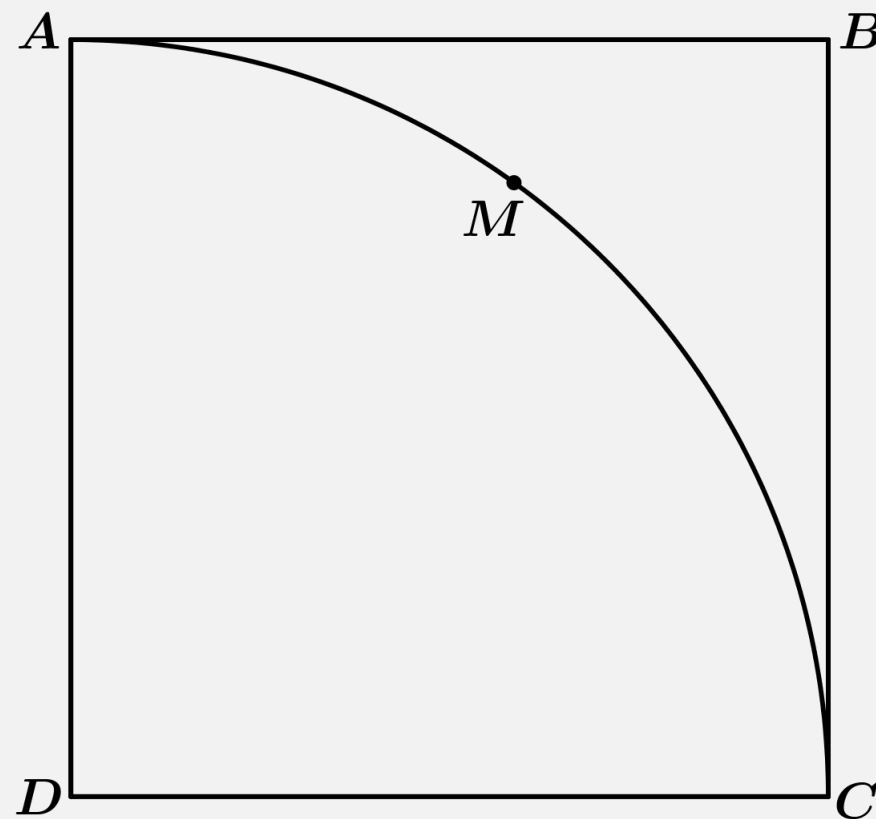
- A) BD
- B) AC
- C) CD
- D) BC
- E) AD

**CLAVE: A**

PROBLEMA 2 (EXAMEN ADMISIÓN UNI 2010 –

2)

En la figura mostrada, ABCD es un cuadrado, ADC es un sector circular con centro en D, $m\angle ABM = \theta$ y $m\angle ADM = \phi$. Calcule $\tan(\theta)$ en términos de ϕ .



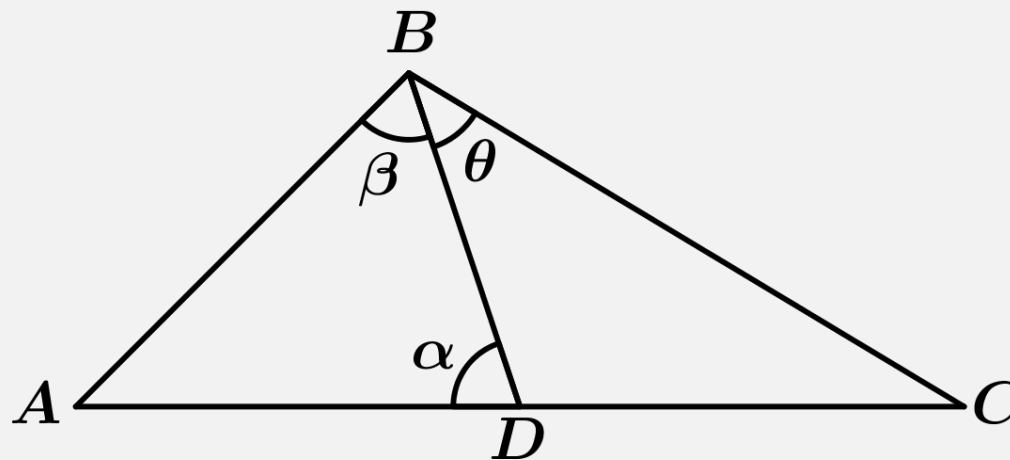
- A) $\frac{1 + \sin(\phi)}{1 + \cos(\phi)}$ B) $\frac{1 + \cos(\phi)}{1 + \sin(\phi)}$
 C) $\frac{2 - \cos(\phi)}{2 - \sin(\phi)}$ D) $\frac{1 - \sin(\phi)}{1 - \cos(\phi)}$
 E) $\frac{1 - \cos(\phi)}{1 - \sin(\phi)}$

CLAVE: E

PROBLEMA 3

En la figura mostrada, $AB = a$, $AD = b$, $DC = c$, y $BC = d$. Indique el equivalente de $a \cos(\beta) + b \cos(\alpha) + c \cos(\alpha)$.

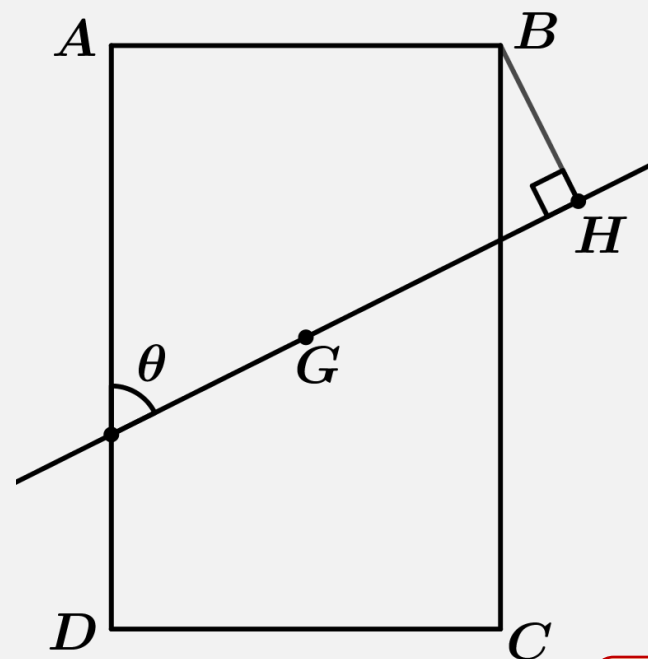
- A) $d(\sin(\theta) + \cos(\theta))$
- B) $d(\cos(\theta) - \sin(\theta))$
- C) $d \sin(\theta) \cos(\theta)$
- D) $d \sin(\theta)$
- E) $d \cos(\theta)$

**CLAVE: E**

PROBLEMA 4

En la figura mostrada, G es el punto de intersección de las diagonales del rectángulo $ABCD$, en donde $AB = a$ y $AD = b$. Expresa BH en términos de a , b y θ .

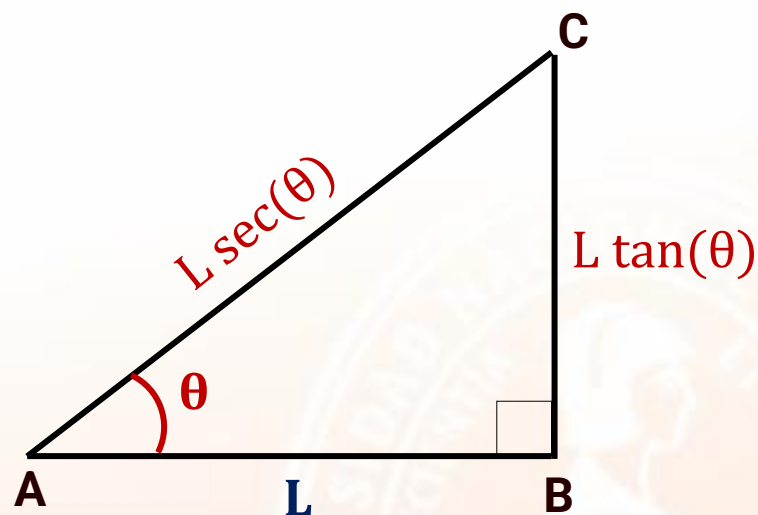
- A) $0,5(a\sin(\theta) - b\cos(\theta))$
- B) $0,5(a\cos(\theta) - b\sin(\theta))$
- C) $0,5(b\sin(\theta) - a\cos(\theta))$
- D) $0,5(b\cos(\theta) - a\sin(\theta))$
- E) $0,5(b\sin(\theta) - a\sin(\theta))$



CLAVE: C

II. SI SE CONOCE LA MEDIDA DE UN ÁNGULO AGUDO Y LA LONGITUD DE SU CATETO ADYACENTE

En la figura: $m\angle BAC = \theta$; $AB = L$



$$* \frac{BC}{L} = \tan(\theta)$$

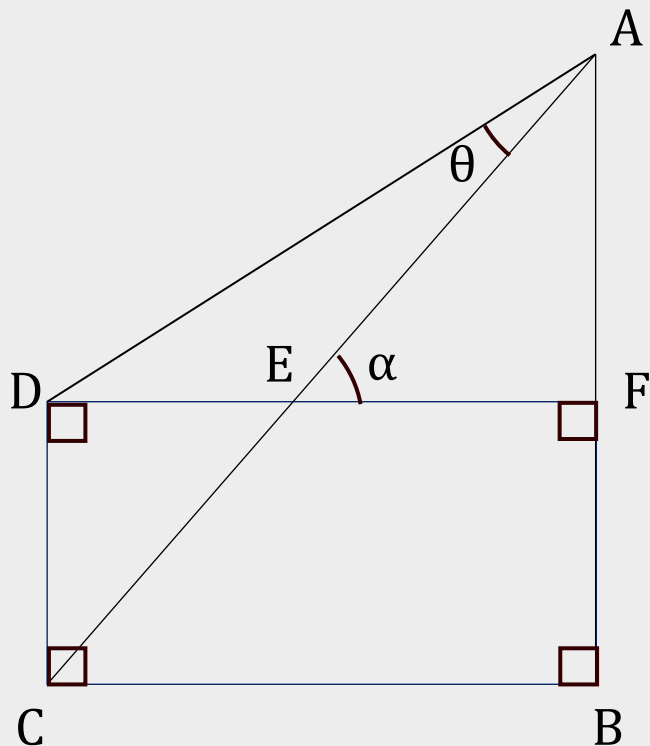
$$BC = L \tan(\theta)$$

$$* \frac{AC}{L} = \sec(\theta)$$

$$AC = L \sec(\theta)$$

PROBLEMA 5

En la figura mostrada, $AD = 5$ u. Calcule (en u) la longitud del segmento $\overline{AB}$.



- A) $5\cos(\alpha + \theta)\tan(\alpha)$
- B) $5\cos(\alpha + \theta) + \tan(\alpha)$
- C) $5\cos(\alpha - \theta) + \tan(\alpha)$
- D) $5\cos(\alpha - \theta)\cot(\alpha)$
- E) $5\cos(\alpha - \theta)\tan(\alpha)$

CLAVE: E

PROBLEMA 6

En un triángulo rectángulo ABC (recto en B), se trazan $\overline{AD}$ (D en $\overline{BC}$) y $\overline{DE} \perp \overline{AD}$ (E en $\overline{AC}$) tal que $BD = 3(DE)$. Si el ángulo DCE mide θ y la medida del ángulo BAD es α , calcule el valor de $G = \tan(\alpha + \theta) \cdot \text{sen}(\alpha)$.

A) 5

B) 4

C) 3

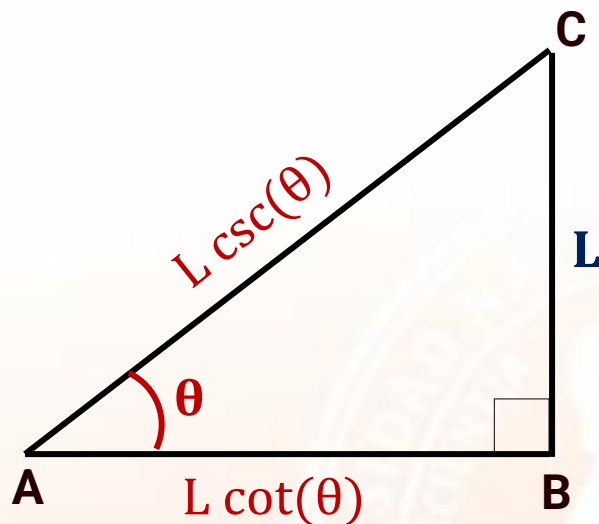
D) 2

E) 1

CLAVE: C

III. SI SE CONOCE LA MEDIDA DE UN ÁNGULO AGUDO Y LA LONGITUD DE SU CATETO OPUESTO

En la figura: $m\angle BAC = \theta$; $BC = L$



$$* \frac{AB}{L} = \cot(\theta)$$

$$AB = L \cot(\theta)$$

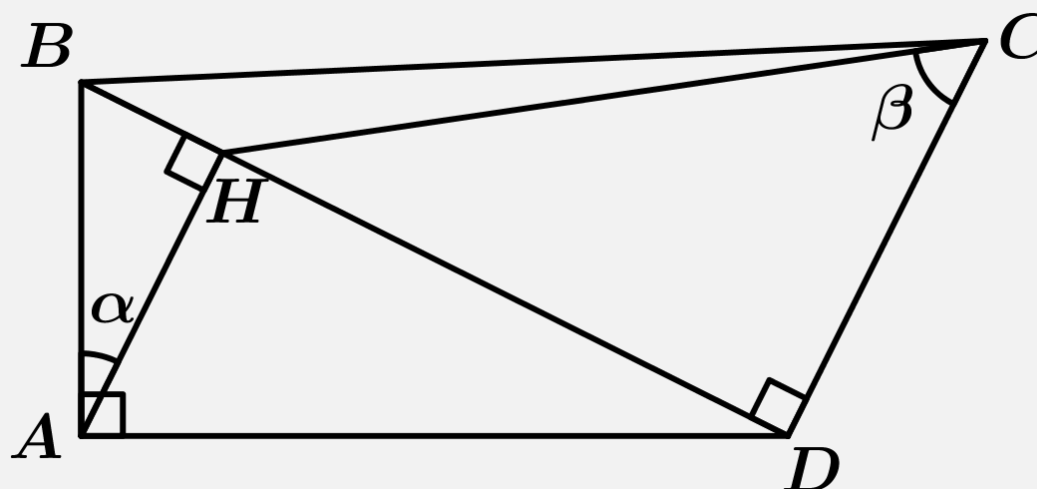
$$* \frac{AC}{L} = \csc(\theta)$$

$$AC = L \csc(\theta)$$

PROBLEMA 7

En la figura mostrada, $BH = a$. Exprese el área de la región triangular BHC en términos de a , α y β .

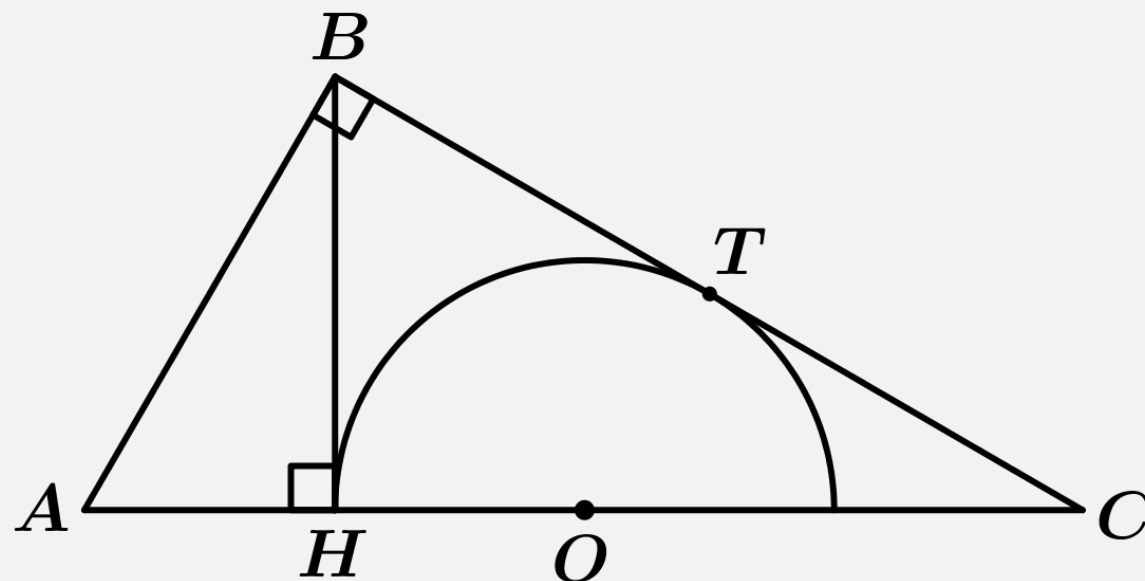
- A) $\frac{a^2}{2} \tan^2(\alpha) \cot(\beta)$
- B) $\frac{a^2}{2} \cot^2(\alpha) \cot(\beta)$
- C) $\frac{a^2}{2} \cot^2(\alpha) \tan(\beta)$
- D) $\frac{a^2}{2} \tan^2(\alpha) \tan(\beta)$
- E) $\frac{a^2}{2} \cot(\alpha) \cot(\beta)$



CLAVE: B

PROBLEMA 8

En la figura mostrada, r representa la longitud del radio de la semicircunferencia de centro O . Además, T y H son puntos de tangencia y θ es la medida del ángulo HBC . Calcule la longitud de AC en términos de r y θ .



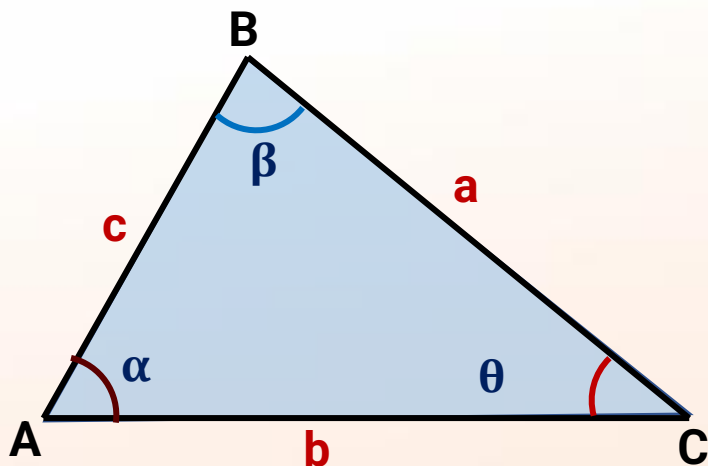
- A) $r(1 + \sec(\theta))\csc^2(\theta)$
- B) $r(1 + \csc(\theta))\sec^2(\theta)$
- C) $r(1 + \tan(\theta))\csc^2(\theta)$
- D) $r(1 + \cot(\theta))\csc^2(\theta)$
- E) $r(1 + \csc(\theta))\tan^2(\theta)$

CLAVE: A

Área de una región triangular

El área de una región triangular es igual al semiproducto de las longitudes de dos de sus lados, multiplicados por el seno del ángulo que forman.

En la figura:



$$S_{ABC} = \frac{bc}{2} \text{sen}(\alpha) = \frac{ac}{2} \text{sen}(\beta) = \frac{ab}{2} \text{sen}(\theta)$$

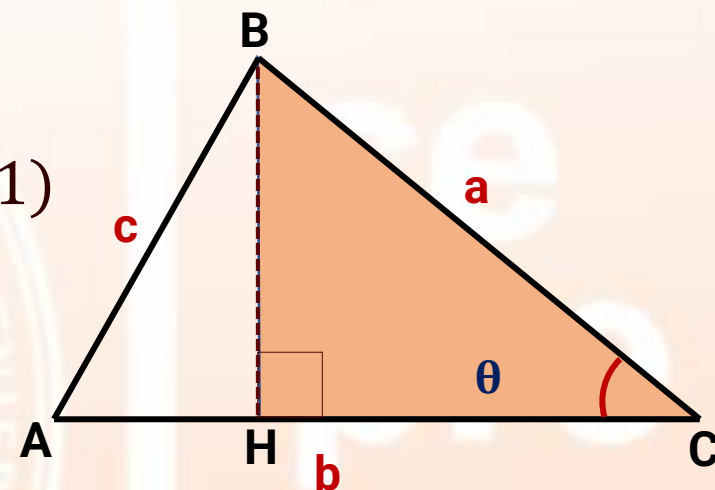
Demostración

Sabemos que:

$$S_{ABC} = \frac{(AC)(BH)}{2} \dots (1)$$

Dado que:

$$\triangle BHC: BH = a \text{sen}(\theta)$$



En (1):
$$S_{ABC} = \frac{(b)(a \text{sen}(\theta))}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{ab}{2} \text{sen}(\theta)$$

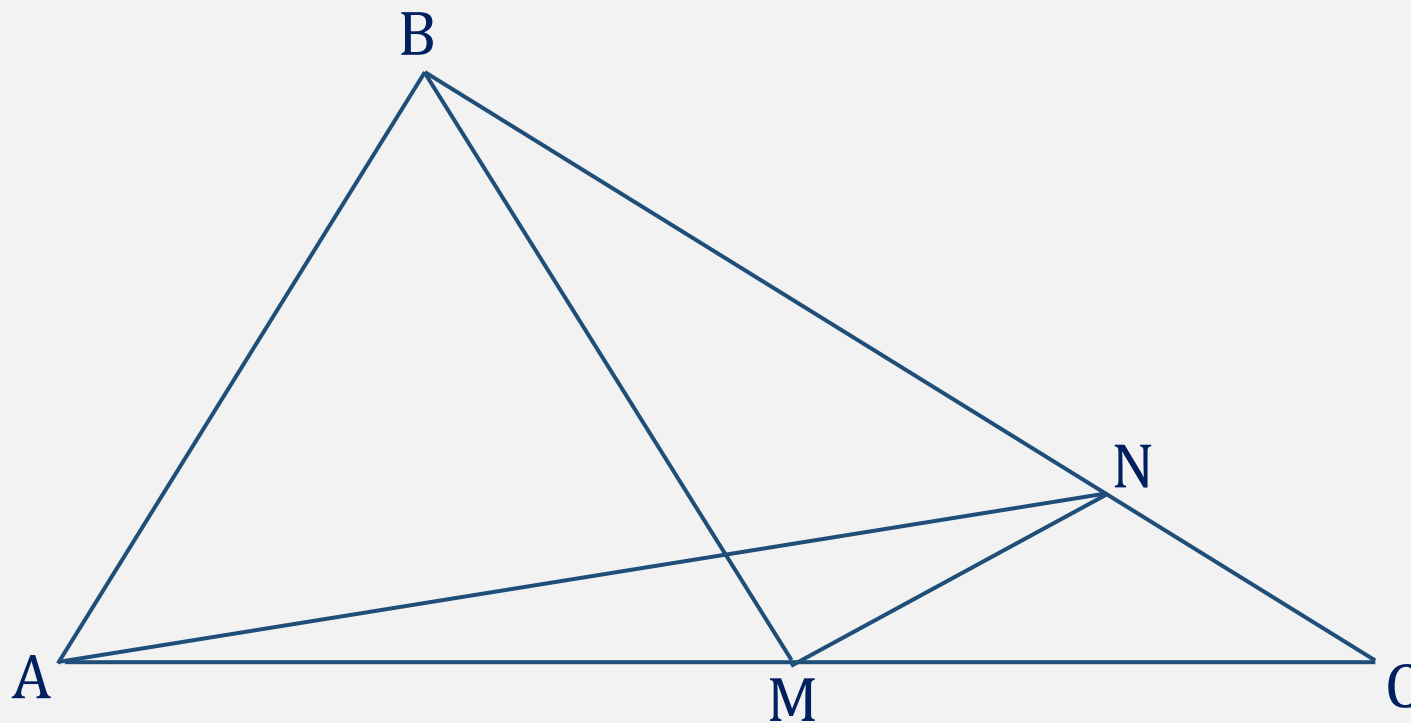
PROBLEMA 9

En un triángulo rectángulo ADC (recto en D), se trazan $\overline{DB}$ (B en $\overline{AC}$) tal que $\overline{BD} = 10$; $\overline{DC} = 6$. Si el ángulo ADB mide θ y el área del triángulo BDC es el cuádruple del área del triángulo ADB , calcule el valor de $\text{sen}(\theta)$.

A) $5/12$ B) $4/25$ C) $3/25$ D) $2/25$ E) $1/10$ **CLAVE: C**

PROBLEMA 10 (1era PC – CEPRE UNI 2020-I)

En la figura mostrada $AM = MC$, $m\angle ABC = m\angle BMN = 90^\circ$, $m\angle ACB = \theta$ y $m\angle ANB = \beta$. Si $\cot(\beta) = m \tan(\theta) + n \cot(\theta)$, calcule el valor de $m^{-2} + n^{-2}$.



CLAVE: B

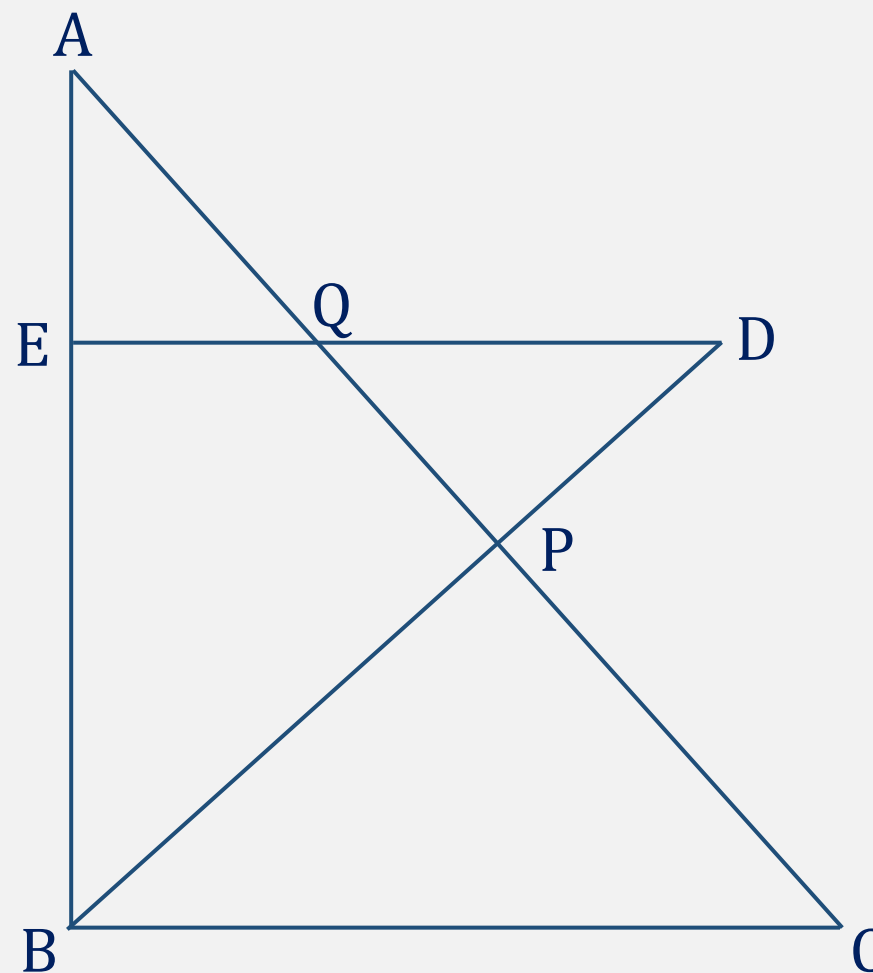
A) 3

B) 8

C) 10

D) 12

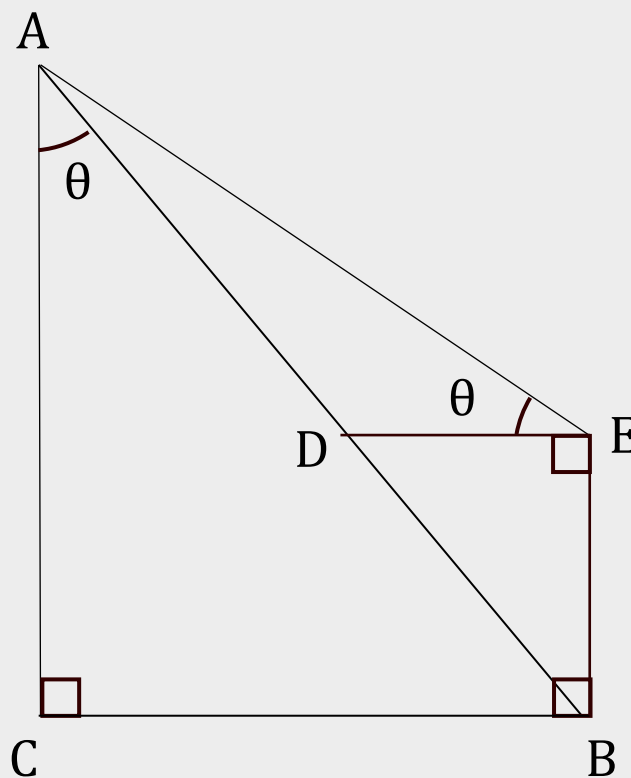
E) 1



PROBLEMA 12

En la figura mostrada, $DE = 2 \text{ u}$. Calcule (en u) la longitud del segmento $\overline{AB}$.

- A) $\frac{2 \cot(\theta) \cdot \csc(\theta)}{\cot(\theta) - \tan(\theta)}$
- B) $\frac{2 \cot(\theta) \cdot \csc(\theta)}{\cot(\theta) + \tan(\theta)}$
- C) $\frac{2 \cot(\theta) + \csc(\theta)}{\cot(\theta) - \tan(\theta)}$
- D) $\frac{\cot(\theta) \cdot \csc(\theta)}{\cot(\theta) - \tan(\theta)}$
- E) $\frac{2 \cot(\theta) - \csc(\theta)}{\cot(\theta) - \tan(\theta)}$



CLAVE: A

PROBLEMA 13

En la figura mostrada, ABCD es un cuadrado y PDQ es un sector circular. Si el área de la región R_1 es igual a la suma de las áreas de las regiones R_2 y R_3 , calcule el valor de $\pi \cdot \sec^2(\theta)$.

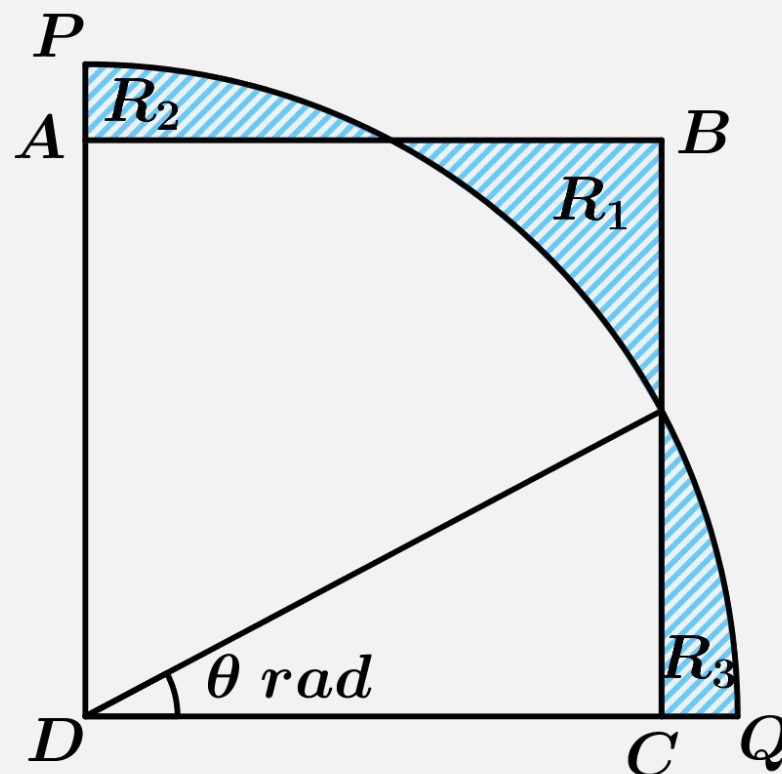
A) 1

B) 2

C) 3

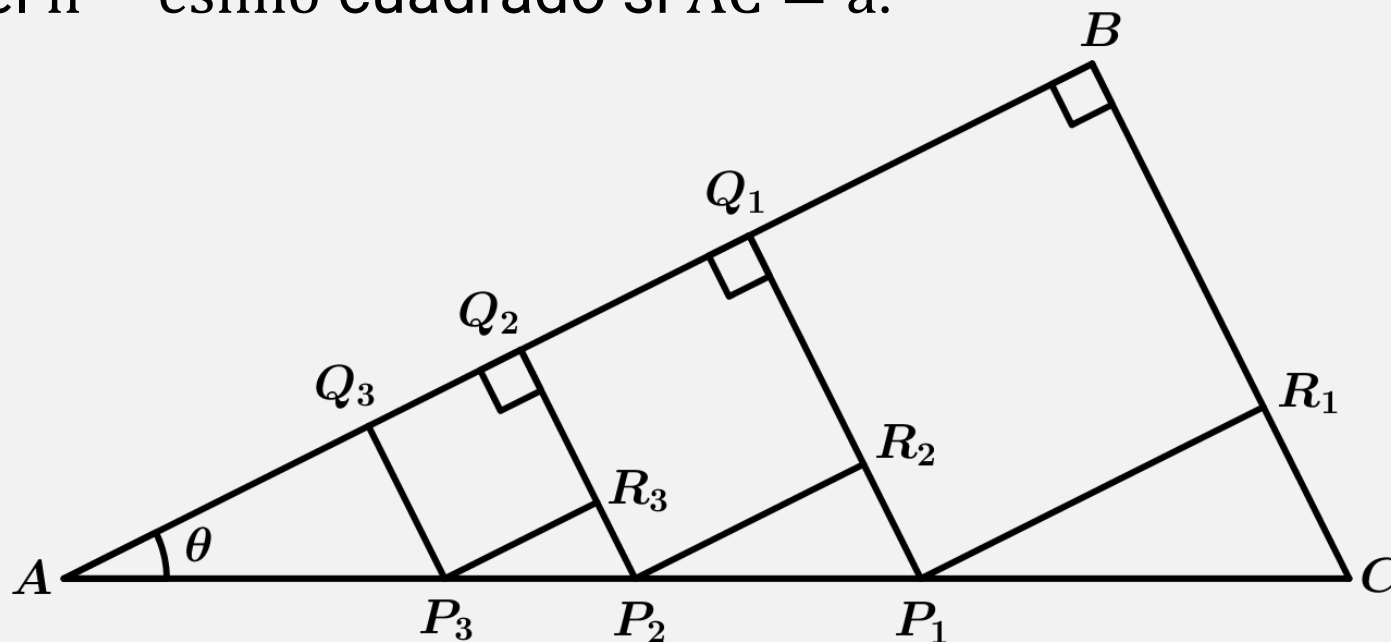
D) 4

E) 5


CLAVE: D

PROBLEMA 14

En la figura mostrada, en el triángulo rectángulo ABC se inscriben los cuadrados $P_1Q_1BR_1$, $P_2Q_2Q_1R_2$, $P_3Q_3Q_2R_3$ y así sucesivamente. Calcule la longitud del lado del n – ésimo cuadrado si $AC = a$.



- A) $\frac{\operatorname{asen}(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^n}$
- B) $\frac{\operatorname{acos}(\theta)}{(1 + \operatorname{sen}(\theta))^n}$
- C) $\frac{\operatorname{asen}(\theta)}{(1 + \tan(\theta))^n}$
- D) $\frac{\operatorname{asen}(\theta)}{(1 + \cot(\theta))^n}$
- E) $\frac{\operatorname{acos}(\theta)}{(1 + \tan(\theta))^n}$

CLAVE: C

CICLO: PREUNIVERSITARIO 2024-I

PROBLEMA 16

En la figura mostrada, el área de la región triangular DEB es el doble del área de la región triangular ACE. Si la medida del ángulo CDE es igual a 45° , calcule el valor de $1 + \tan(\theta)$.

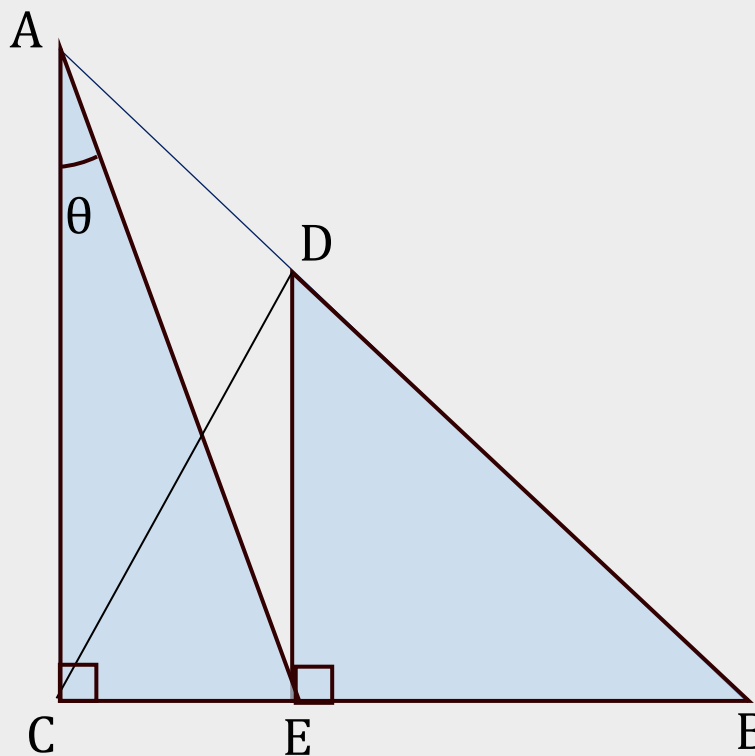
A) $\sqrt{2}$

B) $\sqrt{3}$

C) $\sqrt{5}$

D) $\sqrt{6}$

E) $\sqrt{7}$


CLAVE: B

ÁNGULOS VERTICALES

Definición:

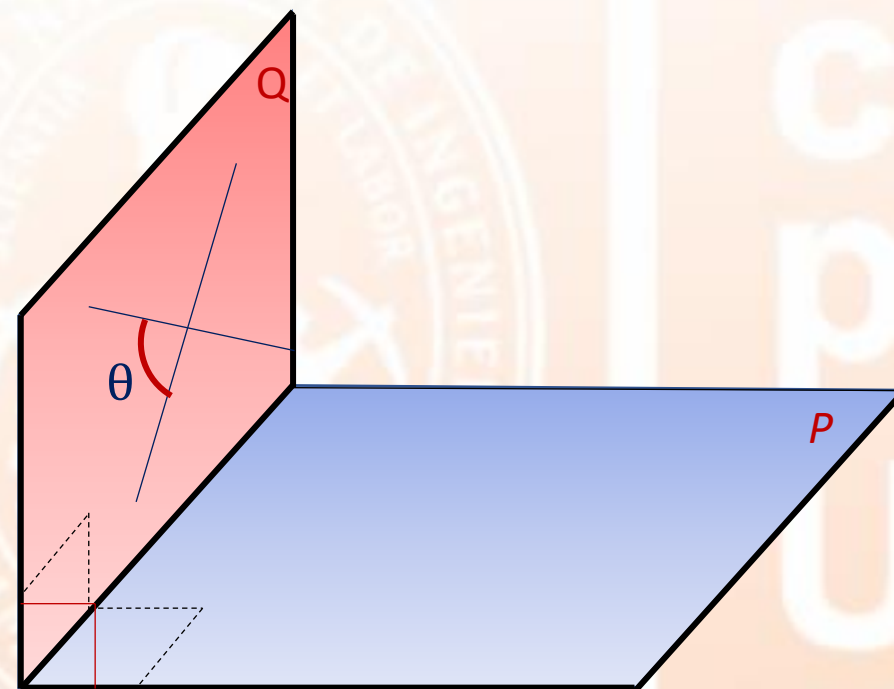
Los ángulos verticales son aquellos que están contenidos en un plano vertical.

En la figura:

P: plano horizontal

Q: plano vertical

θ : Medida del ángulo vertical



Consideraciones

Los ángulos verticales que vamos a estudiar, se generan por efecto de realizarse una observación; siendo estos ángulos formados por una **línea visual** y una **línea horizontal**.

La **línea visual** es aquella línea recta imaginaria que une el ojo del observador y el objeto que se observa.

La **línea vertical** es aquella línea que coincide con la trayectoria de un cuerpo al ser atraído al centro de la tierra o la línea que sigue la dirección de una plomada.



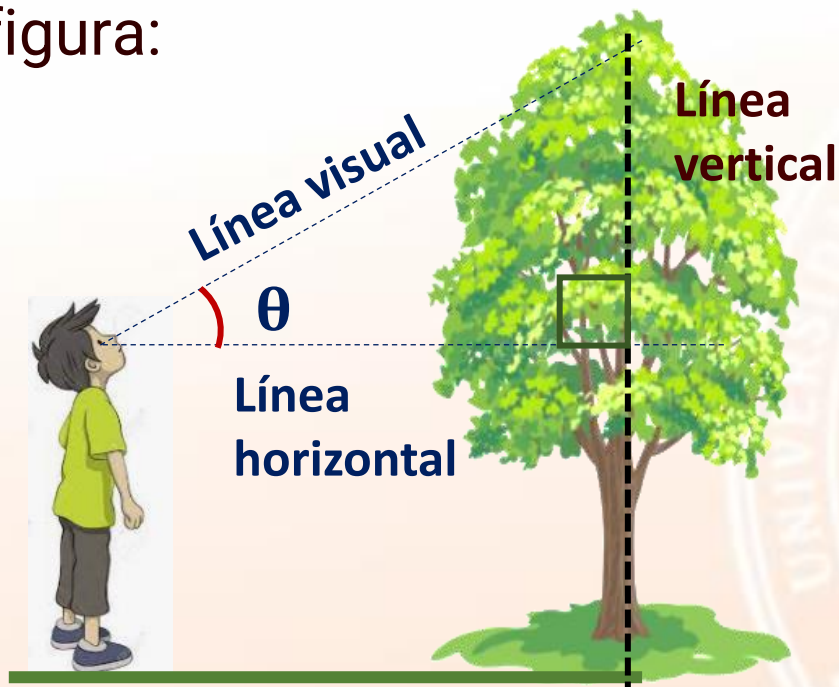
La **línea horizontal** es aquella línea perpendicular a la línea vertical.

Estos ángulos pueden ser de **elevación** o **depresión**, según la ubicación del objeto observado respecto al observador.

ÁNGULO DE ELEVACIÓN

Es aquel ángulo vertical formado por la línea visual y la línea horizontal, generado cuando el objeto observado se encuentra por encima del observador.

En la figura:

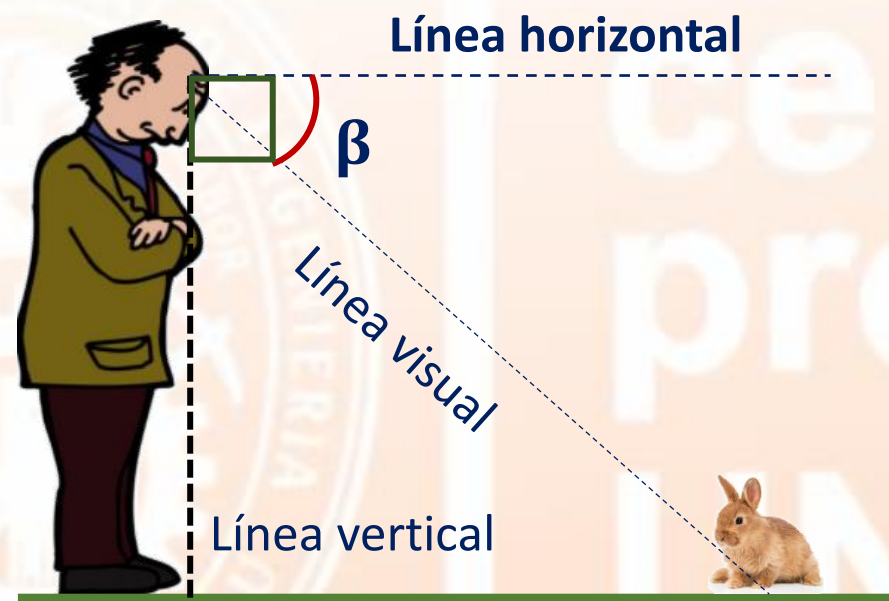


θ : Medida del ángulo de elevación

ÁNGULO DE DEPRESIÓN

Es aquel ángulo vertical formado por la línea visual y la línea horizontal, generado cuando el objeto observado se encuentra por debajo del observador.

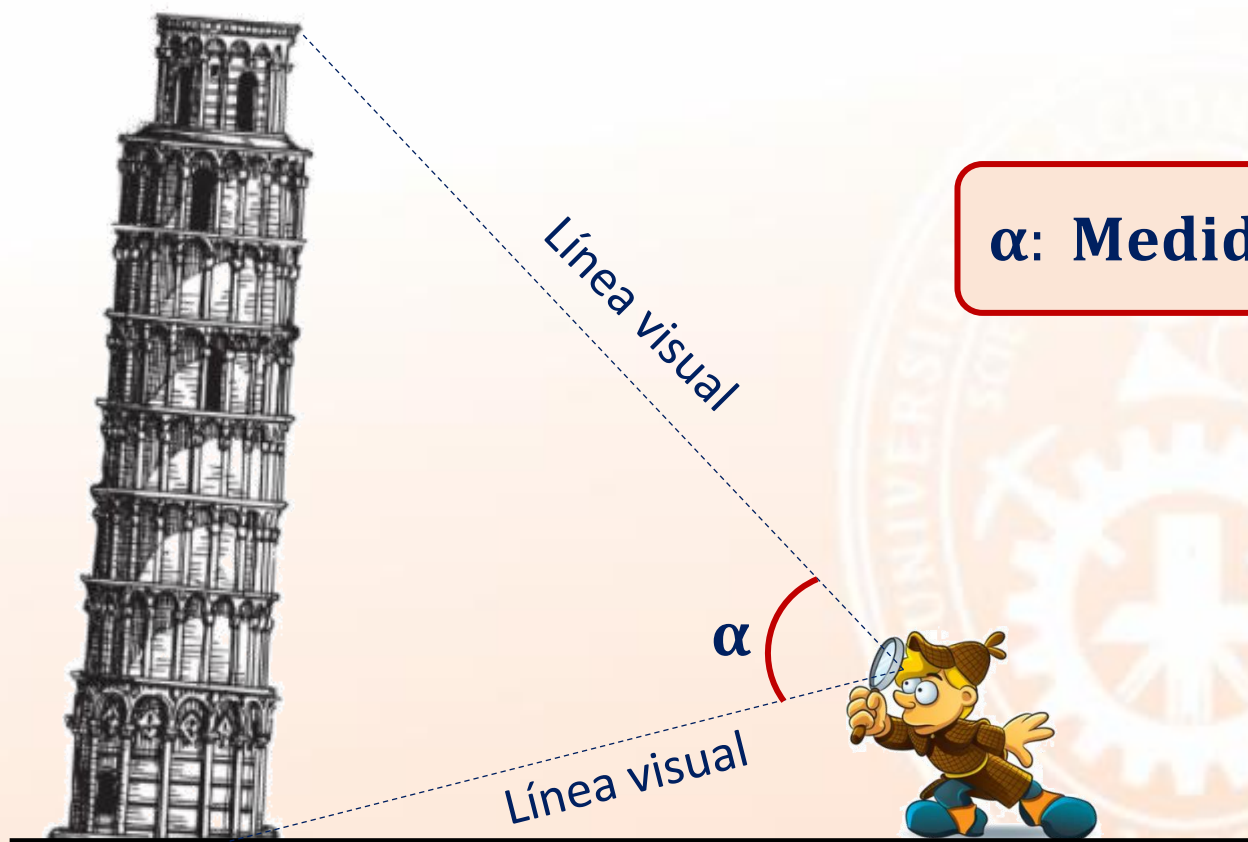
En la figura:



β : Medida del ángulo de depresión

ÁNGULO DE OBSERVACIÓN

Es aquel ángulo vertical formado por dos líneas visuales trazadas desde un mismo observador, hacia la parte alta y parte baja de un objeto que posee dichas características.



α : Medida del ángulo de observación

PROBLEMA 17

Un estudiante observa la parte más alta de un árbol con un ángulo de elevación θ . Si avanza 4 m hacia el árbol, el ángulo de elevación es 53° y si se aleja 11 m, el ángulo de elevación es 16° . Calcule el valor aproximado de $\tan(\theta)$.

A) $\frac{22}{41}$

B) $\frac{24}{41}$

C) $\frac{26}{41}$

D) $\frac{28}{41}$

E) $\frac{30}{41}$

CLAVE: D**PROBLEMA 18 (1ra PC - CEPRE UNI 2014 - 2)**

Un estudiante del CEPRE UNI se encuentra a 10 m de un edificio en un mismo plano vertical y observa la parte alta con un ángulo de elevación cuya tangente es 0,2. Luego avanza 6 m hacia el edificio y vuelve a observar la parte alta del edificio con un ángulo de elevación α . Calcule el valor de $\tan(\alpha)$.

A) $1/8$

B) $1/5$

C) $1/4$

D) $1/3$

E) $1/2$

CLAVE: E

PROBLEMA 19

Un ingeniero, que asciende por una colina inclinada 15° respecto a la horizontal, observa colina arriba lo alto de una torre con un ángulo de elevación de 45° . Luego de caminar $(3\sqrt{3} + 2)$ m vuelve a observar el mismo punto con un ángulo de elevación de 53° . Calcule (en m) la altura de la torre.

A) $\frac{21\sqrt{3}}{2}$

B) $\frac{23\sqrt{2}}{2}$

C) $\frac{21\sqrt{2}}{2}$

D) $\frac{23\sqrt{3}}{2}$

E) $\frac{23\sqrt{6}}{2}$

CLAVE: B

PROBLEMA 20

Una colina está inclinada un ángulo α con respecto a la horizontal. Si desde lo alto de la colina se divisa un punto del suelo con un ángulo de depresión θ a una distancia del inicio de la colina igual al doble de la altura de ésta, calcule el valor de

$$H = \frac{\cot(\theta) + \cot(\alpha)}{1 + \cot(\alpha)}$$

A) 0,5

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

CLAVE: C**PROBLEMA 21**

Desde la parte superior del quinto piso de un edificio de siete pisos se observa un punto del suelo con un ángulo de depresión θ y desde la parte superior del edificio se observa el mismo punto con un ángulo de depresión igual al complemento de θ . Calcule el valor de $\tan(\theta)$.

A) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$

B) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

C) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

D) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$

E) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

CLAVE: D

PROBLEMA 22 (1ra PC – CEPRE UNI 2016 - I)

Descendiendo de una colina que tiene un ángulo de inclinación θ respecto a la horizontal, se observa un punto en el plano horizontal con un ángulo de depresión α . A la mitad de todo el descenso se observa el mismo punto con un ángulo de depresión β .

Calcule el valor de $\frac{\cot(\theta) + \cot(\beta)}{\cot(\alpha)}$

A) $1/2$ B) 2 C) $3/2$ D) 2 E) $5/2$ **CLAVE: D**

PROBLEMA 23

Desde la parte superior de un edificio de 48m de altura se divisa una torre con un ángulo de elevación de 30° y la base de la torre con un ángulo de depresión de 60° . Calcule la altura de la torre.

- A) 42m B) 54m C) 64m D) 74m E) 84m

CLAVE: C**PROBLEMA 24**

Un paracaidista desciende verticalmente. En el instante en que se encuentra a 800 m sobre la tierra, observa, con un ángulo de depresión de 45° , un globo aerostático que asciende verticalmente. Luego, cuando el paracaidista ha descendido 100 m, vuelve a observar al globo con un ángulo de elevación de 53° . Si en la última observación el globo está a 900 m de la tierra, calcule (en m) la altura a la que se encontraba en la primera observación.

- A) 550 B) 600 C) 650 D) 700 E) 750

CLAVE: C

PROBLEMA 25

Desde la parte más alta de un faro se observa un barco con un ángulo de depresión θ y, en la misma dirección, un avión con un ángulo de elevación θ . Cuando el avión está sobre el barco a una altura H , éste se ha acercado al faro una distancia d . Calcule la altura del faro.

- A) $\frac{1}{2}(H + d\tan(\theta))$ B) $\frac{1}{2}(H + d\cot(\theta))$ C) $H - d\tan(\theta)$
D) $H - d\cot(\theta)$ E) $2H - d\tan(\theta)$

CLAVE: A

PROBLEMA 26

Una persona de 2m de altura y que se encuentra a una distancia de 30 m de la base de un edificio, observa toda el asta de una bandera, que se encuentra en el último piso del edificio, con un ángulo de observación de 7° . Si la persona observa la parte alta del edificio con un ángulo de elevación de 53° , calcule la longitud del asta de la bandera.

A) 2m

B) 5m

C) 8,96m

D) 10,96m

E) 11,96m

CLAVE: E